

参数对二分支斜齿轮传动动载和均载特性影响

董金城, 王三民, 林 何, 王琳杰
(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

摘 要: 采用集总质量法建立二分支斜齿轮传动系统的动力学模型及动力学方程, 考虑轮齿啮合偏差和时变啮合刚度等激励因素, 研究分别在不同支承刚度和不同分扭角度情况下, 传动系统的动载系数和均载系数的变化规律, 得出如下结论: ①较大的支承刚度有利于改善传动系统的均载特性和运转平稳性, 在16倍初始支承刚度下系统的均载特性已趋近于理想情况; ②二分支斜齿轮传动系统的分扭角度对其动载系数和均载系数有较大影响, 在分扭角度为 110° 时系统的均载特性最优; ③即使 $1\mu\text{m}$ 的轮齿啮合偏差也会对系统的均载特性产生较大不良影响, 应严格控制。

关 键 词: 二分支; 集总质量法; 啮合偏差; 时变啮合刚度; 分扭角度; 动载系数; 均载系数
中图分类号: V233.1; TH113 **文献标志码:** A

Parameters effect on dual-path helical gear transmission dynamic load and load sharing characteristic

DONG Jin-cheng, WANG San-min, LIN He, WANG Lin-jie

(School of Mechanical Engineering,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The lumped mass method was adopted to establish the dual-path helical gear transmission system dynamic model and dynamic equation; and considering the gear meshing deviation and time-varying meshing stiffness, change rule of the dynamic load coefficient and the load sharing coefficient of transmission system were studied in the case of different support stiffness and separated torque angles. The results show that: (1) the larger support stiffness is conducive to the transmission system load sharing characteristic and stability, and the load sharing characteristic is close to the ideal at the case of 16 times the initial support stiffness; (2) the dual-path helical gear transmission system's separated torque angle has a great influence on the dynamic load coefficient and the load sharing coefficient, and the system loading sharing characteristic gets the most optimal at the separated torque angle of 110° ; (3) even $1\mu\text{m}$ meshing deviation has a great negative effect on the system loading sharing characteristic, so it should be strictly controlled.

Key words: dual-path; lumped mass method; meshing deviation;
time-varying meshing stiffness; separated torque angle;
dynamic load coefficient; load sharing coefficient

二分支齿轮传动系统越来越广泛地应用于直
升机、舰船以及大型冶金与矿山机械传动系统中,

该结构能够减小系统尺寸,降低齿轮的负载,解决
了齿轮传动的大功率、大扭矩、大传动比问题,具

有广阔的应用前景。

二分支齿轮传动系统动力学特性研究主要是对系统的固有频率和动载系数进行分析,其结果能够为此类齿轮传动系统的优化设计和振动控制提供理论依据,确保系统工作时的稳定性和可靠性。杜佳佳等^[1]用轴单元法建立了齿轮耦合多转子系统动力学模型,研究了系统固有特性及不平衡响应。董金城等^[2]在轴承-转子系统动力学理论的基础上,考虑齿轮啮合效应和转子弯扭耦合效应,研究了功率四分支齿轮传动系统的固有特性。李楠等^[3]基于转子动力学研究了功率四分支齿轮传动系统的固有特性和动载系数。Krantz^[4]提出影响分支传动均载特性的两支路间同时啮合的误差角,研究了二分支齿轮传动系统的均载特性。袁茹等^[5]研究了浮动件支承刚度对行星齿轮功率分流动态均衡性的影响。孙智民等^[6]建立了星型齿轮传动的弯扭耦合非线性动力学计算模型,并研究了刚度、误差激励和间隙的相互耦合关系。Singh 等^[7]理论试验研究了行星齿轮传动的均载性能。

齿轮时变啮合刚度是齿轮动力学中的一个重要内激励。国外早期啮合刚度研究的典型成果是 Umezawa 等^[8-12]用等效悬臂梁的有限差分模型计算了斜齿轮的载荷分布,总结出了斜齿轮刚度的近似计算公式。唐增宝等^[13]推导出斜齿圆柱齿轮啮合瞬时接触线长度的计算方法,并提出了斜齿轮的静态啮合刚度和动态啮合刚度的计算公式。卜忠红等^[14]利用基于线性规划法计算啮合刚度和载荷分布的改进方法,总结了啮合刚度在一个啮合周期内的变化规律。

本文在考虑齿轮啮合偏差和齿轮时变啮合刚度激励情况下,建立了二分支斜齿轮传动系统的动力学模型和动力学方程,研究了该系统在不同支承刚度和不同分扭角度情况下的动载系数和均载系数的变化规律。

1 系统动力学模型

二分支斜齿轮传动系统结构简图如图 1 所示。功率经输入盘、一级主动齿轮(齿轮 1)分流至 2 个参数相同的一级从动齿轮(齿轮 2 和齿轮 4),然后通过 2 个参数相同的二级主动齿轮(齿轮 3 和齿轮 5)合并,由二级从动齿轮(齿轮 6)、输出盘输出。

采用集总质量法^[15-17]建立系统动力学模型,如图 2 所示。将各齿轮的质量 $m_i (i=1\sim6)$ 、转动

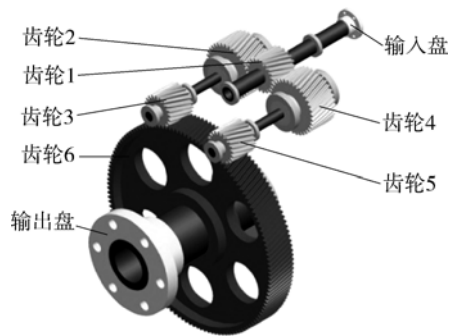


图 1 二分支斜齿轮传动系统

Fig. 1 Dual-path helical gear transmission system

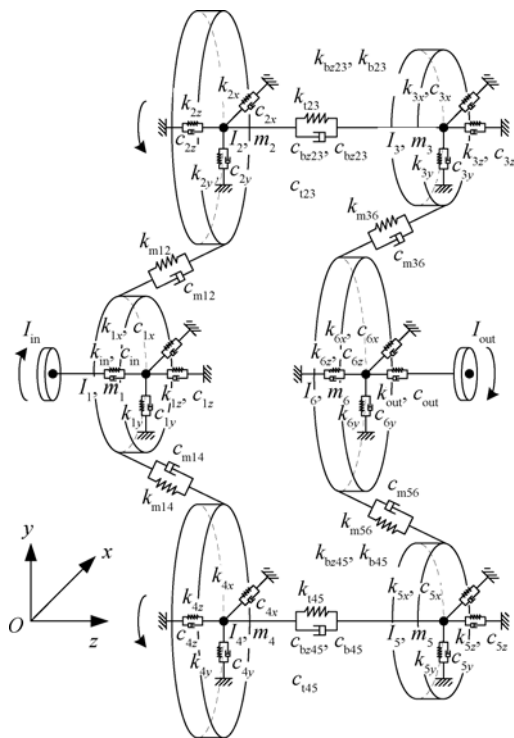


图 2 二分支斜齿轮传动系统动力学模型

Fig. 2 Dual-path helical transmission system dynamical model of dual-path helical gear

惯量 $I_i (i=1\sim6)$ 以及输入盘和输出盘的转动惯量 I_{in}, I_{out} 均集中等效在各自几何形心上,并在各几何形心上建立局部坐标系 $O_i x_i y_i$ 。输入、输出盘仅考虑转动自由度 θ ,各个集中质量节点具有 $\{x_i, y_i, z_i, \theta_i\} (i=1\sim6)$ 4 个自由度。 k, c 分别表示刚度和阻尼;下标 m 表示齿轮副啮合作用; t, b, bz 表示简化为无质量弹簧的中间扭力传动轴的扭转、弯曲和沿 z 轴的拉压作用; x, y, z 表示轴承对齿轮在坐标方向上的支承作用; in, out 表示输入和输出轴的扭转作用。 β_i 表示齿轮螺旋角; φ_i 表示齿轮副啮合平面与坐标轴 y 轴夹角。

2 系统振动微分方程

基于牛顿第二定律,建立各构件动力学方程.

齿轮 1

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{1x} \dot{x}_1 + k_{1x} x_1 = - \sum_{i=2,4} (k_{m1i} \delta_{1i} + c_{m1i} \dot{\delta}_{1i}) \cos \beta_i \sin \psi_i \\ m_1 \ddot{y}_1 + c_{1y} \dot{y}_1 + k_{1y} y_1 = - \sum_{i=2,4} (k_{m1i} \delta_{1i} + c_{m1i} \dot{\delta}_{1i}) \cos \beta_i \cos \psi_i \\ m_1 \ddot{z}_1 + c_{1z} \dot{z}_1 + k_{1z} z_1 = \sum_{i=2,4} (k_{m1i} \delta_{1i} + c_{m1i} \dot{\delta}_{1i}) \sin \beta_i \\ I_1 \ddot{\theta}_1 + c_{in} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{in}) + k_{in} (\theta_1 - \theta_{in}) = - \sum_{i=2,4} (k_{m1i} \delta_{1i} + c_{m1i} \dot{\delta}_{1i}) r_1 \cos \beta_i \end{cases} \quad (1)$$

齿轮 2(齿轮 4)

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 + c_{2x} \dot{x}_2 + k_{2x} x_2 + b_{23} (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + b_{23} (x_2 - x_3) = (m_{12} \ddot{x}_{12} + \dot{m}_{12} \dot{x}_{12}) \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_{2y} \dot{y}_2 + k_{2y} y_2 + b_{23} (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + b_{23} (y_2 - y_3) = (m_{12} \ddot{y}_{12} + \dot{m}_{12} \dot{y}_{12}) \cos \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_{2z} \dot{z}_2 + k_{2z} z_2 + b_{23} (\dot{z}_2 - \dot{z}_3) + b_{23} (z_2 - z_3) = - (m_{12} \ddot{z}_{12} + \dot{m}_{12} \dot{z}_{12}) \sin \alpha_2 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + i_{23} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) + i_{23} (\theta_2 - \theta_3) = (m_{12} \ddot{x}_{12} + \dot{m}_{12} \dot{x}_{12}) r_2 \cos \alpha_2 \end{cases} \quad (2)$$

齿轮 3(齿轮 5)

$$\begin{cases} m_3 \ddot{x}_3 + c_{3x} \dot{x}_3 + k_{3x} x_3 + b_{23} (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + b_{23} (x_3 - x_2) = - (m_{36} \ddot{x}_{36} + \dot{m}_{36} \dot{x}_{36}) \cos \alpha_3 \sin \alpha_3 \\ m_3 \ddot{y}_3 + c_{3y} \dot{y}_3 + k_{3y} y_3 + b_{23} (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + b_{23} (y_3 - y_2) = - (m_{36} \ddot{y}_{36} + \dot{m}_{36} \dot{y}_{36}) \cos \alpha_3 \cos \alpha_3 \\ m_3 \ddot{z}_3 + c_{3z} \dot{z}_3 + k_{3z} z_3 + b_{23} (\dot{z}_3 - \dot{z}_2) + b_{23} (z_3 - z_2) = (m_{36} \ddot{z}_{36} + \dot{m}_{36} \dot{z}_{36}) \sin \alpha_3 \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + i_{23} (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) + i_{23} (\theta_3 - \theta_2) = - (m_{36} \ddot{x}_{36} + \dot{m}_{36} \dot{x}_{36}) r_3 \cos \alpha_3 \end{cases} \quad (3)$$

仅需将式(2)和式(3)中的下角标 2,3 分别更改为 4,5 即可得到相应的齿轮 4、齿轮 5 的方程,此处不再赘述.

齿轮 6

$$\begin{cases} m_6 \ddot{x}_6 + c_{6x} \dot{x}_6 + k_{6x} x_6 = \sum_{i=3,5} (k_{m6i} \delta_{6i} + c_{m6i} \dot{\delta}_{6i}) \cos \beta_i \sin \psi_i \\ m_6 \ddot{y}_6 + c_{6y} \dot{y}_6 + k_{6y} y_6 = \sum_{i=3,5} (k_{m6i} \delta_{6i} + c_{m6i} \dot{\delta}_{6i}) \cos \beta_i \cos \psi_i \\ m_6 \ddot{z}_6 + c_{6z} \dot{z}_6 + k_{6z} z_6 = - \sum_{i=3,5} (k_{m6i} \delta_{6i} + c_{m6i} \dot{\delta}_{6i}) \sin \beta_i \\ I_6 \ddot{\theta}_6 + c_{out} (\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_{out}) + k_{out} (\theta_6 - \theta_{out}) = \sum_{i=3,5} (k_{m6i} \delta_{6i} + c_{m6i} \dot{\delta}_{6i}) r_6 \cos \beta_i \end{cases} \quad (4)$$

输入盘和输出盘

$$I_{in} \ddot{\theta}_{in} + c_{in} (\dot{\theta}_{in} - \dot{\theta}_1) + k_{in} (\theta_{in} - \theta_1) = T_{in} \quad (5)$$

$$I_{\text{out}} \ddot{\theta}_{\text{out}} + c_{\text{out}} (\dot{\theta}_{\text{out}} - \dot{\theta}_6) + k_{\text{out}} (\theta_{\text{out}} - \theta_6) = -T_{\text{out}} \quad (6)$$

式中 δ_{ij} 表示齿轮副 ij 沿啮合线方向的相对位移

$$\delta_{ij} = [(x_i - x_j) \sin \psi_{j(i)} + (y_i - y_j) \cos \psi_{j(i)} + (r_i \theta_i - r_j \theta_j)] \cos \beta_{j(i)} + (-z_i + z_j) \sin \beta_{j(i)} - e_{ij}(t) \quad (7)$$

式中 $e_{ij}(t)$ 表示轮齿啮合偏差,即实际齿廓表面对理想齿廓的偏移.理想齿廓啮合线方向上的轮齿啮合偏差可以表示成级数的形式

$$e_{ij}(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega_{ij}t + \varphi_n) \quad (8)$$

式中 A_n 为啮合偏差的第 n 阶幅值,为便于结果分析对比取为 $1 \mu\text{m}$. ω_{ij} 为啮合频率, φ_n 为第 n 阶啮合初相位.计算结果表明:取第 1 阶级数代入计算,对结果误差影响很小,故轮齿啮合偏差级数截取第 1 阶进行运算.

时变啮合刚度 $k_{mij}(t)$ 可表示为级数和形式^[18]

$$\begin{cases} k_{mij}(t) = k_m + 2k_a \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\pi n \epsilon) + \cos(\pi n \epsilon)] \\ a_n = -\frac{2}{\pi} \sin[\pi(\epsilon - 2)] \sin(\pi n \epsilon) \\ b_n = -\frac{2}{\pi} \cos[\pi(\epsilon - 2)] \sin(\pi n \epsilon) \end{cases} \quad (9)$$

式中 k_a 为啮合刚度的变化幅值; k_m 为齿轮啮合平均刚度,可根据 GB/T3480-1997 中相应公式计算得到; ϵ 为重合度; ϵ_0 为啮合刚度起始相位, $0 < p < 1$. 根据计算对比,方程中的傅里叶级数取前 20 阶就能精确地表征时变啮合刚度的变化特征,故截取前 20 阶级数进行运算.

将方程式(1)~式(9)联立,并写成矩阵形式

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = f \quad (10)$$

式中 m, c, k, f, q 分别为质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵、力矩向量和位移向量.

3 求解系统动力学方程

由于系统中各集中质量扭转方向的位移 θ 不受约束,所以方程式(10)是一个半正定微分方程组.引入相邻集中质量间的相对位移以消除刚体位移,将由于轮齿相互啮合而使齿轮发生的振动角位移转换成沿啮合作用线上的相对线位移,同时规定齿面受压时为正方向.将同轴集中质量的角位移换算成沿轴的直径圆周切向方向的相对线位移

$$\tilde{\delta}_{ij} = R_{ij}(\theta_i - \theta_j) \quad (11)$$

式(11)中 i 取 in, 2, 4, 6; j 取 1, 3, 5, out; R_{ij} 为同轴两相邻集中质量之间轴的等效半径; θ_i, θ_j 为轴两端集中质量元件的振动角位移.

把 $\tilde{\delta}_{ij}, \tilde{\delta}_{ij}$ 作为扭转方向的新自由度,整理各扭转动力学方程得到一个 2 阶正定线性微分方程组,量纲一化的振动微分方程表示为

$$M\ddot{Q} + C\dot{Q} + KQ = F \quad (12)$$

式中 M, C, K, F, Q 分别为消除刚体位移并量纲一化的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵、力矩向量和位移向量.

4 动力学特性分析

4.1 系统主要参数

本文二分支斜齿轮传动系统基本参数如表 1 所示.采用数值积分方法求解系统动力学方程,求出各齿轮副啮合点相对位移 $\delta_{ij}(t)$ 和相对速度 $\dot{\delta}_{ij}(t)$,根据 $\delta_{ij} = \delta_{ij}(t) - \delta_{ij}(0) + \dot{\delta}_{ij}(0)t$ 求得各齿轮副随时间变化的动载荷,由动载系数定义 $k_d = \max\{\delta_{ij}/\delta_{ij0}\}$ 得到齿轮副动载系数,根据公式 $k_b = \text{mean}\{\delta_{ij}/\delta_{ij0}\}$ 得到齿轮副均载系数.各图中以 $v_1, b_1, v_2, b_2, v_3, b_3, v_4, b_4$ 表示齿轮副 12, 14, 36, 56 的动载系数和均载系数.

表 1 系统基本参数

Table 1 System essential parameters

参数	数值
输入功率/kW	25 000
输入转速/(r/min)	3 000
一级传动比	4.308
二级传动比	3.436
齿数 Z_1	39
齿数 $Z_2(Z_4)$	168
齿数 $Z_3(Z_5)$	39
齿数 Z_6	134
一级模数 m_{n1}	7
二级模数 m_{n2}	9
压力角/(°)	20
一级螺旋角/(°)	15.16
二级螺旋角/(°)	15.09

4.2 系统的固有频率

系统一级、二级传动齿轮啮合频率分别为 12 252.211 4, 2 844.263 4 Hz. 求解系统的动力学

方程得到系统的前几阶固有频率,如表2所示.比较可知,系统的两级传动齿轮啮合频率均远离系统各阶固有频率,避免了主共振现象的出现,因而系统运行状态稳定,有利于后续分析结果的精确性和准确性.

表2 系统固有频率

Table 2 System natural frequency

阶数	固有频率/Hz	阶数	固有频率/Hz
第1阶	757.81	第13阶	2800.09
第2阶	841.20	第14阶	3634.08
第4阶	1145.17	第21阶	9509.48
第5阶	1229.49	第22阶	13536.31

4.3 不同支承刚度下的动载系数及均载系数

改变系统中各轴承的支承刚度数值,在 $2^{-4} \sim 2^4$ 之间以2倍递进变化,求出支承刚度与动载系数的变化关系.仅考虑时变啮合刚度的影响,如图3所示;综合考虑时变啮合刚度和轮齿啮合偏差的影响,如图4所示.

根据图3、图4可知,改变系统支承刚度会导致动载系数和均载系数发生变化,且随着支承刚度的提高,动载系数和均载系数均趋近于某一有

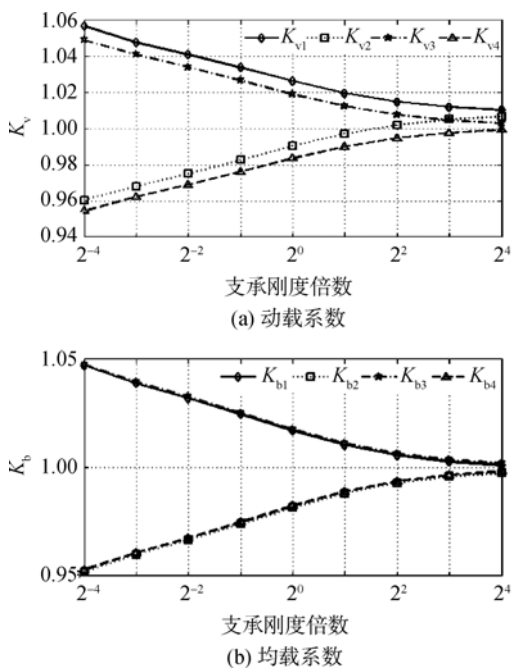


图3 时变啮合刚度作用下支承刚度对动载系数和均载系数的影响

Fig. 3 Effect of support stiffness on dynamic load coefficient and load sharing coefficient under time-varying meshing stiffness

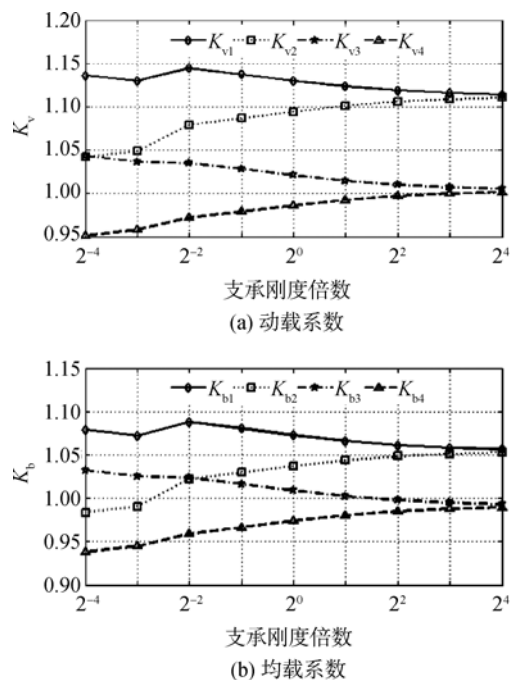


图4 时变啮合刚度和轮齿啮合偏差综合作用下支承刚度对动载系数和均载系数的影响

Fig. 4 Effect of support stiffness on dynamic load coefficient and load sharing coefficient under time-varying meshing stiffness and gear meshing deviation

利于系统均载的数值.对于系统中的分支结构而言,由于两侧分支齿轮与中间齿轮啮合时受力角度的差异,导致一侧的动载系数和均载系数随着支承刚度的提高减小,另一侧则相应增大.比较图3和图4可知,轮齿啮合偏差的存在导致二分支斜齿轮传动系统一级两个分支结构的均载系数趋近于1.05,而二级的均载系数趋近于0.99,即造成系统两级结构的动载特性和均载特性出现分化,该现象不利于系统均载优化的实现.这说明,提高系统支承刚度非常利于系统的均载,而轮齿啮合偏差对系统的动载特性和均载特性会产生较大消极影响,应严格控制.

4.4 不同分扭角度下的动载系数及均载系数

第一级齿轮传动的两组齿轮副中心连线之间的夹角称为分扭角度,该角度在二分支斜齿轮传动系统的安装过程中是一个重要参数.改变系统分扭角度,在 $60^\circ \sim 180^\circ$ 之间以 5° 递进变化,求出分扭角度与动载系数的变化关系.仅考虑时变啮合刚度的影响,如图5所示;综合考虑时变啮合刚度和轮齿啮合偏差的影响,如图6所示.

根据图5、图6可知,二分支斜齿轮传动系统的分扭角度对系统的动载系数和均载系数有较大

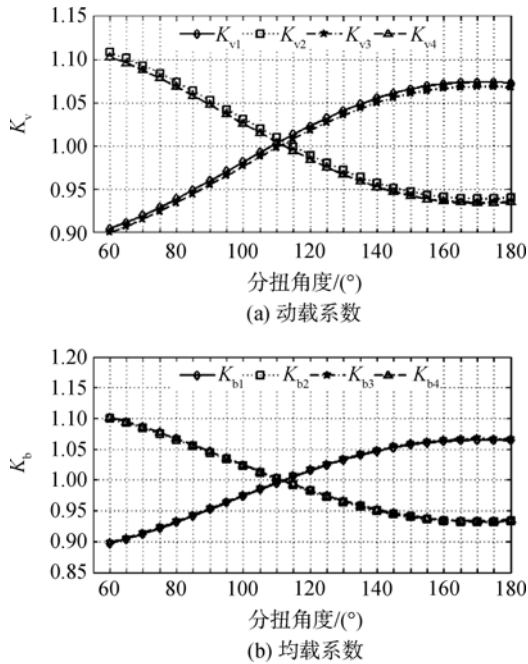


图5 时变啮合刚度作用下分扭角度对动载系数和均载系数的影响

Fig. 5 Effect of separated torque angle on dynamic load coefficient and load sharing coefficient under time-varying meshing stiffness

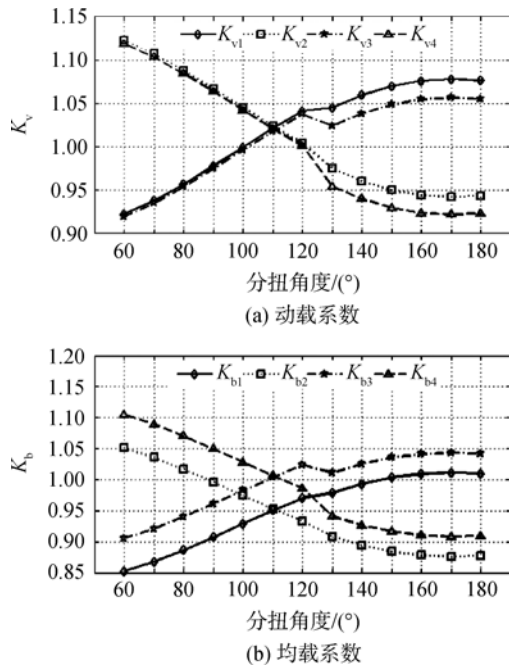


图6 时变啮合刚度和轮齿啮合偏差综合作用下分扭角度对动载系数和均载系数的影响

Fig. 6 Effect of separated torque angle on dynamic load coefficient and load sharing coefficient under time-varying meshing stiffness and gear meshing deviation

影响,分支传动某一侧的动载系数和均载系数随着分扭角度的增加而增加,另一侧则相应降低,如前所述,这种现象同样是由系统两侧分支齿轮与中间齿轮啮合时受力角度的差异造成的.仅考虑时变啮合刚度影响的情况下,系统各级各分支的动载系数和均载系数在 110° 附近均为 1. 综合考虑时变啮合刚度和轮齿啮合偏差影响的情况下,系统各级各分支的动载系数在 110° 附近均约为 1.02;而各级各分支的均载系数出现分化,一级两个分支的均载系数在 110° 附近约为 0.95,二级两个分支的均载系数在 110° 附近约为 1. 因此,轮齿啮合偏差导致二分支斜齿轮传动系统两级结构的均载条件不一致,不利于系统均载运行状态的实现.因而,对于二分支斜齿轮传动系统,分扭角度的选取非常重要,适当的分扭角度可以大大降低系统动载系数,优化系统的均载特性,有利于系统的平稳运行.同时,即使较小的轮齿啮合偏差对系统均载最优状态的实现也会产生不利影响,必须严格控制.

5 结 论

1) 二分支斜齿轮传动系统的各级各分支结构的动载系数和均载系数均随着系统支承刚度的增加而降低,本文中系统的动载系数和均载系数在 16 倍支承刚度情况下已经趋近于一个理想的值.因此,较大的支承刚度有利于改善系统的均载特性和工作稳定性.

2) 二分支斜齿轮传动系统的分扭角度对系统的动载系数和均载系数均有很大影响,文中系统的分扭角度在 110° 附近时,其各级各分支结构的动载系数和均载系数均可达到一个比较理想的值.在设计过程中,针对不同基本参数的二分支斜齿轮传动系统,需要根据本文所述方法或其他方法,确定其适当的分扭角度,以实现系统的最优均载特性.

3) 轮齿啮合偏差对系统的均载特性有不良影响,即使较小的偏差值也会造成二分支斜齿轮传动系统各级各分支均载特性的分化.当轮齿啮合偏差为 $1\mu\text{m}$ 时,系统在 16 倍支承刚度条件下,一级、二级均载系数分别趋近于 1.05 和 0.99,在 110° 分扭角度条件下,一级、二级均载系数分别趋近于 0.95 和 1. 因此,轮齿啮合偏差非常不利于系统最优均载特性的实现,应严格控制.

参考文献:

[1] 杜佳佳,王三民,王颖.功率双分支传动系统的动力学特性

- 研究[J]. 机械制造, 2012, 50(572): 10-13.
- DU Jiajia, WANG Sanmin, WANG Ying. Research on dynamic characteristics of power dual-path gear transmission[J]. Machinery, 2012, 50(572): 10-13. (in Chinese)
- [2] 董金城, 王三民, 王颖. 功率四分支齿轮传动系统的弯扭耦合振动固有特性研究[J]. 机械科学与技术, 2014, 33(1): 1-7.
- DONG Jincheng, WANG Sanmin, WANG Ying. Study on the coupled bending-torsion vibration characteristics of power four-path gear transmission[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2014, 33(1): 1-7. (in Chinese)
- [3] 李楠, 王三民, 杜佳佳. 功率四分支齿轮传动系统的固有特定与动载系数[J]. 航空动力学报, 2013, 28(2): 445-451.
- LI Nan, WANG Sanmin, DU Jiajia. Natural characteristics and dynamic load coefficient of power four embranchments gear transmission[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(2): 445-451. (in Chinese)
- [4] Krantz T L. Method to analyze and optimize the load sharing of split-path transmissions [R]. NASA Technical Memorandum 107201, 1996.
- [5] 袁茹, 王三民, 沈允文. 行星齿轮传动的功率分流动态均衡优化设计[J]. 航空动力学报, 2000, 15(4): 410-418.
- YUAN Ru, WANG Sanmin, SHEN Yunwen. Dynamic optimum design of power shared out equally among the planetary gears[J]. Journal of Aerospace Power, 2000, 15(4): 410-418. (in Chinese)
- [6] 孙智民, 沈允文, 王三民, 等. 星型齿轮传动非线性动力学建模与动载荷研究[J]. 航空动力学报, 2001, 16(4): 402-407.
- SUN Zhimin, SHEN Yunwen, WANG Sanmin, et al. Non-linear dynamic modeling and dynamic tooth loads analysis of star gearing system[J]. Journal of Aerospace Power, 2001, 16(4): 402-407. (in Chinese)
- [7] Singh A, Kahraman A, Ligata H. Internal gear strains and load sharing in planetary transmissions; model and experiments[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(7): 072602. 1-072602. 10.
- [8] Umezawa K. Deflection and moments due to a concentrated load on a rack-shaped cantilever plate with finite width for gears[J]. Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1972, 15(79): 116-130.
- [9] Umezawa K. The meshing test on helical gear under load-transmissions; Reprt 1 the approximate formula for deflections of gear tooth[J]. Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1972, 15(90): 1632-1639.
- [10] Umezawa K. The meshing test on helical gear under load-transmissions; Report 2 the approximate formula for bending-moment distribution of gear tooth[J]. Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1973, 16(92): 407-413.
- [11] Umezawa K. The meshing test on helical gear under load-transmissions; Report 3 the static behaviours of driven gear[J]. Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1974, 17(112): 1348-1355.
- [12] Umezawa K, Suzuki T, Houjoh H, et al. Vibrations of power transmission helical gears (the effect of contact ration on the vibration) [J]. Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1985, 28(238): 694-700.
- [13] 唐增宝, 钟毅芳, 戴玉堂. 斜齿圆柱齿轮传动的静态啮合刚度和动态啮合刚度[J]. 机械设计, 1993(6): 10-13.
- TANG Zengbao, ZHONG Yifang, DAI Yutang. The static meshing stiffness and dynamic meshing stiffness of helical cylindrical gear transmission[J]. Journal of Machine Design, 1993(6): 10-13. (in Chinese)
- [14] 卜忠红, 刘更, 吴立言. 斜齿轮啮合刚度变化规律研究[J]. 航空动力学报, 2010, 25(4): 957-962.
- BU Zhonghong, LIU Geng, WU Liyan. Research on the variation rules of meshing stiffness of the helical gear[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(4): 957-962. (in Chinese)
- [15] 虞烈, 刘恒. 轴承-转子系统动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
- [16] 闻邦椿, 顾家柳, 夏松波, 等. 高等转子动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.
- [17] 欧卫林, 王三民, 袁茹. 齿轮耦合复杂转子系统弯扭耦合振动分析的轴单元法[J]. 航空动力学报, 2005, 20(3): 434-439.
- OU Weilin, WANG Sanmin, YUAN Ru. Shaft element method for the analvsis of lateral-torsional coupling vibration of a complex gear-rotor system[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(3): 434-439. (in Chinese)
- [18] 郭家舜. 功率分流传动系统非线性动力学特性及其分析方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2013.
- GUO Jiashun. Study of the nonlinear dynamic characteristics of a split path transmission and relevant analysis methods[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2013. (in Chinese)